微分方程

一阶
- 可分离变量的方程
- 齐次方程
- 非齐次线性方程 → 求解
- 伯努利方程

二阶
- 线性常系数
  - 齐次 → 特征方程根分解
  - 非齐次 → 待定系数
- 可降阶
  - $y''=f(x,y')$ 缺 y
  - $y''=f(y,y')$ 缺 x

高阶
- 降阶 $y''=f(x)$
- 常系数齐次线性 → 特征方程根分解
- 欧拉方程

通解：未知常数的个数与阶数相同 通解

eg: $y=\frac{x}{\ln x}$ 是 $y'=\frac{y}{x}+\varphi(\frac{x}{y})$ 的解 求 $\varphi(\frac{x}{y})$ 的表达式:

$$\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=\frac{1}{\ln x}+\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\varphi\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{-1}{(\ln x)^2}=-\frac{y^2}{x^2}$$

可分离　if eg ⇒ $g(y)dy=f(x)dx$　方法：同时积分

eg: $y'=\frac{y(1-x)}{x}$　$=\frac{dy}{dx}=\frac{y(1-x)}{x}$

$$\frac{dy}{y}=\frac{1-x}{x}dx$$

$$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1-x}{x}dx$$

$$\ln|y|=\ln|x|-x+C \qquad y=e^{\ln|x|-x+C}=\frac{C|x|}{e^x}=\pm\frac{C|x|}{e^x}=\frac{C'x}{e^x}$$

齐次方程：可化为 $\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$

令 $u=\frac{y}{x}$　$y=ux$　$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$

$\Rightarrow x\frac{du}{dx}+u=\varphi(u)$

先把 y' 整理出来

eg $xy'-y=\sqrt{x^2-y^2}$ 求 $y(1)=\frac{1}{2}$ 的特解

$y'-\frac{y}{x}=\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}$

$y'=\varphi(\frac{y}{x})$　$u=\frac{y}{x}$　$\frac{du}{dx}=-\frac{y}{x^2}$

$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u$

$x\frac{du}{dx}+u=\sqrt{1-u^2}+u$

$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \arcsin u=\ln|x|+C'$

$u=\sin(\ln|x|+C')$

$y=x\sin(\ln|x|+C')$

$\frac{1}{2}=\sin(C')$　$C'=\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow y=x\sin(\ln|x|+\frac{\pi}{6})$

一阶线性微分方程：

$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ 一阶非齐次线性微分方程通解

$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$

$y(1)=-\frac{1}{9}$

eg: $xy'+2y=x\ln x$　$y'+\frac{2}{x}y=\ln x$

$y=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[\int \ln x\, e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$　$x>0$

$=e^{-2\ln|x|+C_1}\left[\int \ln x\cdot|x|^2dx+C\right]$

$$= x^{-2} \cdot \left[\int \ln x \cdot x^2 dx + C \right]$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx \quad \Rightarrow x^{-2} \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C \right]$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx \quad = \frac{x}{3} \ln x - \frac{x}{9} + \frac{C}{x^2}$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \quad \Rightarrow y(1) = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow y = x \frac{3\ln x - 1}{9}$$

eg: $f(x)$ 连续 → 可积,

(1) 求初值: $\begin{cases} \frac{dy}{dx} + ay = f(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$$y = e^{-\int a dx} \left[\int f(x) e^{\int a dx} + C \right]$$

$$= e^{-ax} \left[\int f(x) e^{ax} dx + C \right]$$

$$F(x) = \int f(x) e^{ax} dx$$

$$y = e^{-ax} \left[F(x) + C \right]$$

$$y(1) = 0 \quad F(0) = -C$$

变限积分

$$\Rightarrow y = e^{-ax} \left[F(x) - F(0) \right]$$

$$y = e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt$$

(2) 计 $|f(x)| \le k$, proof: when $x \geq 0$, $|y(x)| \le \frac{k}{a} (1 - e^{-ax})$

from (1) $\quad y = e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt$

$$|y| = e^{-ax} \left| \int_0^x f(t) e^{at} dt \right| \le e^{-ax} \int_0^x |f(x)| e^{at} dt$$

$$\le e^{-ax} \int_0^x k e^{at} dt = \frac{k}{a} (1 - e^{-ax})$$

可降阶微分方程

$y''=f(x,y')$ 型 令 $y'=p$ 则 $y''=p'$，方程化为 $p'=f(x,p)$

$y''=f(y,y')$ 型 令 $y'=p$，$y''=p\frac{dp}{dy}$ $\quad y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\Rightarrow p\cdot\frac{dp}{dy}$

$\Rightarrow p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

eg: $xy''+3y'=0$ $\quad y'=p$

$$x\frac{dp}{dx}+3p=0 \qquad \frac{dp}{p}=\frac{3dx}{-x}$$

$$\frac{dp}{dx}=\frac{-3p}{x} \qquad x^{-3}$$

$$\ln|p|=-3\ln|x|+c\ dx$$

$$p=e^{-3\ln|x|+c}=\frac{c}{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{c_1}{x^3} \qquad y=\frac{c_1}{-2}x^{-2}+C_2=C_1x^{-2}+C_2$$

伯努利方程：$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^n$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}p(x)=q(x)$$

令 $z=y^{1-n}$ $\quad \frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=(1-n)y^{-n}\cdot\frac{dy}{dx}$

$$(1-n)\frac{dz}{dx}+zp(x)=q(x)$$

$$\frac{dz}{dx}+\frac{z}{1-n}p(x)=q(x)$$

$$z=e^{-\int\frac{p(x)}{1-n}dx}\left[\int e^{\int\frac{p(x)}{1-n}}q(x)+c\right]$$

二阶常系数线性微分方程

$$y''+py'+qy=0$$

① 求特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的根 r_1 和 r_2，然后根据 r_1 和 r_2 的情况写出齐次方程通解

若 r_1 和 r_2 为不相等的实根 $\quad y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

若 r_1 和 r_2 为相等的实根　　$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$

若 r_1 和 r_2 为一对共轭复根 $\alpha \pm \beta i$　$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

(2) 用待定系数求非齐次　$y'' + py' + qy = f(x)$ 的特解

☆ 通过 $f(x)$ 自由项假定原方程特解形式，代回原方程

① $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ → 多项式 m 次

$$y = x^k R_m(x) e^{\lambda x}$$

R_m 与 P_m 同次，当 λ 不是特征方程根时 $k=0$，λ 是根时，表示重数

② 当 $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos wx + Q_n(x)\sin wx]$ 且仅有一个可为0时

$$y = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos wx + R_m^{(2)}(x)\sin wx]$$

$m = \max\{l, n\}$ 当 $(\lambda + wi)$ 或 $(\lambda - wi)$ 不是根时 $k=0$，

是单根时为 $k=1$

eg: $y = y(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 内具有二阶导数，且 $y' \neq 0$，$x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数

(1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $x'' + (y + \sin x)(x')^3 = 0$ 变为 $y = y(x)$ 的ODE

(2) 求变换后满足初值 $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解

(1) 反函数求导

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'} \qquad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d(\frac{dx}{dy})}{dy} = \frac{d(\frac{1}{y'})}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{-y''}{(y')^2} \cdot \frac{1}{y'} = -\frac{y''}{y'^3}$$

$$\frac{-y''}{(y')^3} + (y + \sin x)\left(\frac{1}{y'}\right)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y'' - y = \sin x \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \quad w = 1$$

$$y = A\cos x + B\sin x \qquad y' = -A\sin x + B\cos x \qquad y'' = -A\cos x - B\sin x$$

$$y'' - y = -2A\cos x - 2B\sin x = \sin x \Rightarrow A = 0 \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}\sin x$$

非齐次　$C = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}\sin x$

$y = e^{ax}$

$y = xe^{ax}$

$$y'' + py' + qy = 0$$

$$a^2xe^{ax} + p(1+axe^{ax}) + qxe^{ax}$$

$$[a^2 + ap + q]xe^{ax} + p$$